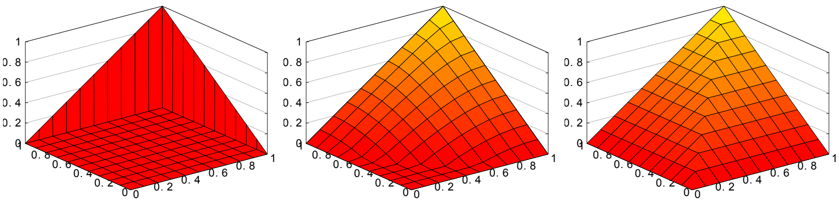
Excel@FIT 2015
http://excel.fit.vutbr.cz

Modelování fuzzy logických spojek

Vojtěch Havlena*



Abstrakt
Tento článek se věnuje způsobu modelování fuzzy logických spojek, speciálně fuzzy konjunkcí na základě empirických dat. Cílem je nalézt algoritmus pro aproximaci aditivních generátorů a pomocí něho experimentálně zjistit, jakým způsobem lidé chápou fuzzy konjunkci. Mimo určení, jaká fuzzy konjunkce nejvíce odpovídá konjunkci ve významu používaném lidmi, si experiment klade také za cíl zjistit, zda lidé chápou konjunkci jako komutativní operaci. V článku je představen a analyzován algoritmus, který na základě empirických dat hledá generátor, aproximovaný pomocí B-splinů, který těmto datům nejvíce odpovídá. Samotný experiment byl vyhodnocen na základě dat sesbíraných od respondentů.

Klíčová slova: T-normy — Lawson-Hansonův algoritmus — Aproximace B-spliny

Přiložené materiály: Dotazník

*xhavle03@stud.fit.vutbr.cz, *Fakulta informačních technologií, Vysoké učení technické v Brně*

1. Úvod

Modelování fuzzy logických spojek spočívá v hledání vhodné triangulární normy, která co nejlépe vyhovuje konečnému počtu empiricky získaných dat. Triangulární norma je funkce, která ve fuzzy logice vyjadřuje konjunkci.

Definice 1.1. *[1] Triangulární norma (zkráceně t-norma) $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je binární komutativní, monotónní, asociativní operace na jednotkovém intervalu s okrajovou podmínkou $T(x,1) = x$.*

Triangulární normy můžeme rozdělit podle jejich vlastností. V tomto článku se budeme zabývat archimedovskými t-normami, které lze vyjádřit aditivními generátory. Triangulární normu T nazýváme archimedovskou, pokud $\forall x \in (0,1)$ platí $T(x,x) < x$.

Definice 1.2. *[1] Aditivní generátor spojité archimedovské t-normy T je klesající funkce $g : [0,1] \to [0,\infty]$ s podmínkou $g(1) = 0$. Přičemž t-norma T je dána předpisem:*

$$T(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y)),$$

kde $g^{(-1)}$ je pseudoinverzní funkce k funkci g.

Vzhledem k požadavkům, kladeným na každou t-normu (zejména komutativnost a asociativnost), je prakticky použitelný případ aproximace právě spojitých archimedovských t-norem. Při zobecnění binární t-normy na n-ární operaci a využití definice 1.2 dostáváme následující rovnost:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^{(-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right). \qquad (1)$$

V této rovnici je g aditivní generátor spojité archimedovské t-normy T. Zde vidíme, že místo aproximace samotných t-norem s ohledem na aproximovaná data, je výhodnější aproximovat jejich aditivní generátory.

Teoretická aproximace aditivních generátorů byla představena v článku [2], některé výsledky jsou stručně uvedeny v následující kapitole. Hlavním přínosem práce je nalezení algoritmu pro aproximaci aditivních generátorů. Ve výsledném algoritmu jsou využity již známe metody a algoritmy, které jsou vhodně upraveny, aby vyhovovaly specifickým podmínkám plynoucích z vlastností t-norem.

2. Aproximace aditivních generátorů

Aditivní generátor jisté t-normy lze aproximovat pomocí spline křivky, což je po intervalech definovaná polynomická funkce. V článku [2] je uvažována *B*-spline křivka. Aproximace touto křivkou se nejčastěji používá v počítačové grafice. Aproximovaný aditivní generátor tedy bude ve tvaru

$$g(x) = S_{m,t}(x) = \sum_{j=1}^{J} c_j B_{j,m}(x), \qquad (2)$$

kde c_j je koeficient, závislý na datech a k je stupeň polynomu. Polynomy $B_{j,k}$ jsou definovány následujícím rekurentním vztahem [3]:

$$\begin{aligned} B_{i,1}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \\ B_{i,m}(x) &= \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \\ &\quad + \frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x), \end{aligned}$$

kde $t_0, \dots, t_m$ jsou jednotlivé uzly. Pokud jsou jednotlivé uzly rozdílné, je počet vnitřních uzlů roven stupni polynomu.

Nyní budeme předpokládat K empirických pozorování ve tvaru [2]:

$$\left\{ (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k), y^k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \qquad (3)$$

Dosazením dat v této formě do rovnice (1) získáme tvar, ze kterého se při aproximaci bude vycházet:

$$g(x_1^k) + g(x_2^k) + \dots + g(x_{n_k}^k) \approx g(y^k).$$

Po nahrazení funkce g za (2) a úpravou výrazu získáváme následující tvar [2]:

$$\sum_{j=1}^{J} c_j \left(\sum_{i=1}^{n_k} B_{j,m}(x_i^k) - B_{j,m}(y^k) \right) \approx 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

Navíc musí být splněny podmínky kladené na aditivní generátory (klesajicí funkce s okrajovou podmínkou $g(1) = 0$ a $g(\varepsilon) = 1$). Monotónnosti lze zaručit splněním podmínky $c_j \in \mathbb{R}_0^-$ [2]. Okrajové podmínky lze s ohledem na aproximaci pomocí *B*-splinů zapsat jako:

$$\sum_{j=1}^{J} c_j B_{j,m}(1) = 0 \qquad \sum_{j=1}^{J} c_j B_{j,m}(\varepsilon) = 1.$$

Hodnota ε by měla být menší než nejmenší nenulová hodnota vstupních dat. Potom hodnoty aproximovaného generátoru na intervalu $[0, \varepsilon]$ nejsou ovlivněny vstupními daty. Na intervalu $[0, \varepsilon]$ je tedy možné generátor vyjádřit libovolně (tedy s ohledem na vlastnosti aditivních generátorů).

Naším cílem při aproximaci je nalézt takové koeficienty c_j, které odpovídají výše uvedeným podmínkám. Všechny podmínky lze maticově zapsat následovně:

$$\mathbf{Ac} \approx \mathbf{0}, \quad -\mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Ec} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

kde jednotlivé matice odpovídají vztahům uvedeným výše.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_{kj}) = \sum_{i=1}^{n_k} B_{j,m}(x_i^k) - B_{j,m}(y^k), \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_J \end{pmatrix}^T, \\ \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} B_0(1) & B_1(1) & \cdots & B_J(1) \\ B_0(\varepsilon) & B_1(\varepsilon) & \cdots & B_J(\varepsilon) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Algoritmus pro aproximaci

V této kapitole se již budeme věnovat samotnému algoritmu pro aproximaci aditivních generátorů. Pokud by podmínky (4) neobsahovaly omezující podmínky na nerovnost a ostrou rovnost, jednalo by se o aproximační problém, který lze snadno vyřešit metodou nejmenších čtverců [4]. Tato metoda řeší aproximační problém

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

nalezením vektoru $\mathbf{x}_{LE}$ minimalizující výraz

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

kde $\|.\|_2$ je Euklidova míra. Díky tomu, že máme dvě omezující podmínky, rozdělíme algoritmus na dvě samostatné části, jejichž řešením se budeme zabývat v dalším textu.

3.1 Metoda váhování

První částí, které se budeme věnovat, je omezení na rovnost $\mathbf{Ec} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. Pro řešení tohoto aproximačního problému je možné využít např. metodu přímé eliminace nebo metodu váhování. V našem případě použijeme metodu váhování kvůli její jednoduchosti. Podstatou této metody je přiřazení dostatečně velkých vah koeficientům, na které jsou kladeny omezující podmínky. Metoda vychází z následujícího vztahu [4]:

$$\mathbf{c}_{LSE} = \arg\min_{\mathbf{c}} \lim_{\gamma \to \infty} \left\| \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{c} - \begin{pmatrix} \gamma (0 \quad 1)^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\|_2^2.$$

Ze vztahu je patrné, že pomocí metody váhování je možné aproximační problém s omezením na rovnost převést na klasickou úlohu řešitelnou metodou nejmenších čtverců. V programu za γ volíme číslo řádově větší než největší prvek matice.

3.2 Lawson-Hansonův algoritmus

V předchozí podkapitole jsme si ukázali metodu váhování, která umožňuje vyřešit omezení na rovnost. V této části se budeme zabývat řešením omezující podmínky na nerovnost. Jedním z algoritmů umožňující, řešení takto omezených optimalizačních problémů nejmenších čtverců, je Lawson-Hansonův algoritmus [5]. Tento algoritmus hledá vektor $\mathbf{x}$ splňující následující podmínky:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \quad \mathbf{x} \geq 0.$$

Algoritmus využívá metodu aktivní množiny. V této množině jsou indexy proměnných, jejichž regresní koeficienty jsou záporné (nebo nula). Ostatní indexy proměnných jsou v pasivní množině. Pokud je aktivní a pasivní množina známa, je problém s omezením na nerovnost vyřešen metodou nejmenších čtverců na proměnné, které jsou v pasivní množině. Koeficienty proměnných v aktivní množině jsou nastaveny na nulu.

Lawson-Hansonův algoritmus je iterační algoritmus, kdy se v každé iteraci stanoví pasivní množina, nad kterou se provede metoda nejmenších čtverců a na základě výsledku se upraví pasivní a aktivní množina. Úprava pasivní a aktivní množiny spočívá ve výměně indexů proměnných. Při úpravě těchto množin dochází také ke spočítání nové hodnoty vektoru $\mathbf{x}$. Při výměně indexů mezi množinami se vyměňují právě ty indexy, jejichž hodnota ve vektoru $\mathbf{x}$ je rovna nule. Zápis algoritmu v pseudokódu je uveden v algoritmu 1.

Poznámky k algoritmu: Pasivní množina je v pseudokódu označena jako P, aktivní jako R. Počet iterací cyklu lze ovlivnit změnou parametru $tolerance$. Zápis $\mathbf{A}^P$ znamená omezení matice $\mathbf{A}$ na proměnné, které jsou obsaženy v pasivní množině P. Samotné počítání nejmenších čtverců je prováděno na řádcích 8 a 13.

3.3 Výsledný algoritmus pro aproximaci

V této části se budeme zabývat spojením dvou předcházejících částí algoritmu a jejich použití pro aproximaci aditivního generátoru podle předešlé kapitoly. Jak již bylo zmíněno dříve, výstupem Lawson-Hansonova algoritmu jsou nezáporné koeficienty. V našem případě však požadujeme, aby aproximovaný aditivní generátor byl klesající, tedy aby koeficienty B-splinu byly záporné. Musíme tedy nejprve provést transformaci vstupních empirických dat a krajních podmínek.

Algoritmus 1: LAWSON-HANSONŮV

Vstup: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
Výstup : $\mathbf{x}^* \geq 0$, kde $\mathbf{x}^* = \arg\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$

1: $P \leftarrow \emptyset$
2: $R \leftarrow \{1, 2, \ldots, n\}$
3: $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$
4: $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$
5: **while** $R \neq \emptyset \wedge \max_{i \in R}(w_i) > tolerance$ **do**
6: $\quad j \leftarrow \arg\max_{i \in R}(w_i)$
7: $\quad$ Přidej index j do pasivní množiny P a odeber ho z množiny R
8: $\quad \mathbf{s}^P \leftarrow [(\mathbf{A}^P)^T \mathbf{A}^P]^{-1} (\mathbf{A}^P)^T \mathbf{b}$
9: $\quad$ **while** $\min(\mathbf{s}^P) \leq 0$ **do**
10: $\quad\quad \alpha \leftarrow -\min_{i \in P}(x_i/(x_i - s_i))$
11: $\quad\quad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{s} - \mathbf{x})$
12: $\quad\quad$ Přesuň z P do R všechny indexy i takové, že $x_i = 0$
13: $\quad\quad \mathbf{s}^P \leftarrow [(\mathbf{A}^P)^T \mathbf{A}^P]^{-1} (\mathbf{A}^P)^T \mathbf{b}$
14: $\quad\quad \mathbf{s}^R \leftarrow \mathbf{0}$
15: $\quad$ **end while**
16: $\quad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{s}$
17: $\quad \mathbf{w} \leftarrow \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$
18: **end while**
19: **return x**

Transformace je dána předpisem:

$$\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}^{-1}(x) = 1 - x.$$

Nad takto transformovanými daty sestavíme matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ a pomocí metody váhování zajistíme splnění transformovaných krajních podmínek. Nad upravenými maticemi pomocí Lawson-Hansonova algoritmu vypočítáme koeficienty B-splinu. Díky provedené transformaci již hledaným řešením není klesající funkce, ale rostoucí funkce, proto požadujeme nezápornost koeficientů B-splinu. Při sestavování výsledného aditivního generátoru pomocí B-splinu musíme provést zpětnou transformaci dosazovaných hodnot, čímž získáme požadovanou klesající funkci se správnými krajními podmínkami. Příklad aproximace známého generátoru je uveden na obrázku 1. Zápis výsledného algoritmu v pseudokódu je uveden v algoritmu 2.

Poznámky k algoritmu: Metoda váhování je použita na řádku 7. Lawson-Hansonův algoritmus je v pseudokódu označen jako funkce *nonnegative*. Nastavení počtu uzlů B-splinu a jejich hodnot záleží na konkrétních datech a toto nastavení je nutné provést experimentálně (samozřejmě s ohledem na stupeň polynomu B-splinu). Výsledná podoba aditivního generátoru je ovlivněna volbou uzlů.

Algoritmus 2: ALGORITMUS PRO APROXIMACI ADITIVNÍHO GENERÁTORU

Vstup: Množina empirických dat ve tvaru $\{\mathbf{x}^k, y^k\}, k = 1,2,\dots,n$

Výstup : Funkční hodnoty $\mathbf{y}$ apr. generátoru s konstantním krokem h

$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{b} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{C} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{d} \leftarrow (0 \quad 1)^T$

$\tilde{\mathbf{x}}^k \leftarrow \mathscr{F}(\mathbf{x}^k)$, $\tilde{y}^k \leftarrow \mathscr{F}(y^k)$ pro $k = 1,2,\dots,n$

Volba stupně polynomu B-splinu m a hodnot ε a γ

Nastavení počtu uzlů B-splinu J a jejich hodnoty $\mathbf{t}$

$A_{kj} \leftarrow \sum_{i=1}^{n_k} B_{j,m}(\tilde{x}_i^k) - B_{j,m}(\tilde{y}^k)$

$E_{0j} \leftarrow B_{m,j}(\mathscr{F}(1))$, $E_{1j} \leftarrow B_{m,j}(\mathscr{F}(\varepsilon))$

$\mathbf{A} \leftarrow \begin{pmatrix} \gamma\mathbf{E} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{b} \leftarrow \begin{pmatrix} \gamma\mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} \leftarrow nonnegative(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$i \leftarrow \varepsilon$

$i \leftarrow h$

while $i \leq 1$ **do**

  if $i < \varepsilon$ **then**

    $y(i) \leftarrow \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{\varepsilon}$

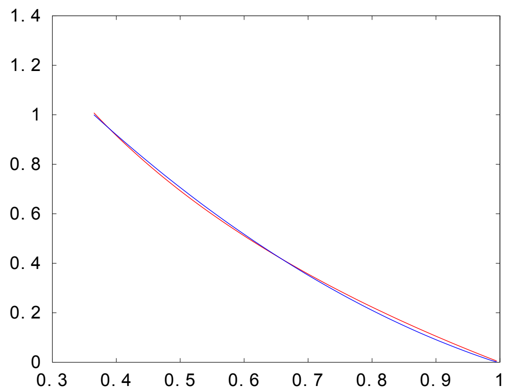
  else

    $y(i) \leftarrow \sum_{j=1}^{J} c_j B_{j,m}(\mathscr{F}^{-1}(i))$

  end if

  $i \leftarrow i + h$

end while



Obrázek 1. Aproximace aditivního generátoru součinové t-normy s aditivním generátorem $g(x) = -\log(x)$ na intervalu $[e^{-1}, 1]$ (červená křivka). Pro aproximaci byly zvoleny B-spliny 3. stupně (modrá křivka). Koeficienty byly spočítány na základě 8 empirických hodnot s dvěma argumenty. Chyba aproximace je $0{,}013$. Výpočet trval $0{,}19$ s.

Abychom si udělali lepší představu o složitosti algoritmu, provedeme odhad asymptotické časové složitosti. V případě Lawson-Hansonova algoritmu se iteračně provádí výpočet nejmenších čtverců. Časová složitost výpočtu nejmenších čtverců je možné rozdělit do dílčích operací.

- Násobení $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) se provede se složitostí $O(mn^2)$, $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ se složitostí $O(nm)$
- Spočítání inverzní matice s $O(n^3)$
- Násobení výsledné inverzní matice s $O(n^2)$

Ve výpisu operací vidíme, že dominují operace násobení $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ a výpočet inverzní matice. Výsledný odhad výpočtu nejmenších čtverců je tedy $O(n^2(n+m))$. Složitost Lawson-Hansonova algoritmu zaleží na celkovém počtu iterací, v kterých se opakovaně počítají nejmenší čtverce. Odhad časové složitosti tedy bude $O(pn^2(n+m))$, kde p je maximální počet provedených iterací. Ve skutečnosti bude hodnota menší, protože se nejmenší čtverce počítají pouze nad maticí omezenou na proměnné v pasivní množině P ($|P| \leq n$).

Co se týče analýzy celkového algoritmu, metoda váhování se provede s časovou složitostí $O(Jn)$ a vyhodnocení funkčních hodnot polynomu se složitostí $O(\lfloor \frac{1-\varepsilon}{h} \rfloor Jm)$. Časově nejnáročnější je tedy samotný výpočet koeficientů pomocí Lawson-Hansonova algoritmu, který se provede v čase $O(pn^2(n+J))$. Vzhledem k tomu, že předpokládáme $J < n$, je celková složitost algoritmu $O(pn^3)$. Výpočet je možné urychlit použitím specializovaných algoritmů pro násobení matic (Strassenův algoritmus) a výpočet inverzní matice, popřípadě využitím De Boorova algoritmu pro vyhodnocování hodnot B-splinu.

4. Experiment modelování fuzzy konjunkce

V rámci aplikace modelování fuzzy konjunkce je proveden experiment, v němž jsou využity znalosti z předchozí kapitoly. Hlavním cílem experimentu je zjistit, jakým způsobem lidé chápou fuzzy konjunkci. Jinými slovy: najít takovou t-normu, která co nejpřesněji modeluje konjunkci ve významu používaném lidmi. Druhým cílem je zjistit, zda lidé chápou konjunkci jako komutativní operaci.

Data, na jejichž základě je modelování provedeno, byla od respondentů získána pomocí papírového dotazníku. Úkolem respondentů bylo přiřadit připraveným výrokům číselnou hodnotu v rozmezí $1-10$, která reprezentuje stupeň pravdivosti daného výroku podle jejich osobního názoru. Výroků je celkem 20, z nichž 10 je prostých a zbylých 10 je utvořeno konjunkcí oněch prostých výroků. Jednotlivé konjunkce jsou uvedeny v obou tvarech, tj. $A \wedge B$ i $B \wedge A$. Oslovení respondenti jsou především z řad studentů Fakulty informačních technologií.

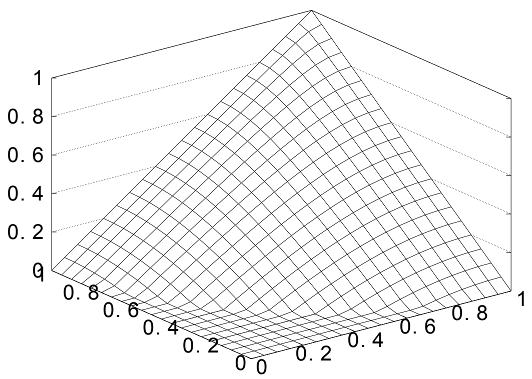
4.1 Vyhodnocení experimentu

Nakonec bylo získáno 204 vyplněných dotazníků od respondentů. Jak již bylo zmíněno dříve, experiment si kladl dva hlavní cíle.

1. *Hledání modelu fuzzy konjunkce chápanou lidmi.* Pro modelování výsledné t-normy byla využita metoda aproximace aditivního generátoru pomocí B-splinu, popsaná v předchozí kapitole. V každém dotazníku bylo 5 sad výroků, aproximace byla tedy provedena na základě více než 1000 empirických hodnot, které bylo nejprve potřeba transformovat do intervalu $[0,1]$. Nad transformovanými daty potom byla provedena aproximace pomocí B-splinů. Vzhledem k tomu, že v empirických datech jsou zastoupeny všechny hodnoty v rozmezí 1 – 10, byla okrajová podmínka ε nastavena na nulu. Pomocí programu a metod popsaných v předchozích kapitolách bylo zjištěno, že výsledný aproximovaný aditivní generátor g na intervalu $[0,1]$ je dán předpisem $g(x) = (1-x)^2$. Předpis generátoru je také ovlivněn volbou uzlových bodů B-splinu. Tento generátor odpovídá t-normě:

$$T_2^Y(x,y) = \max\left\{0, 1 - \left((1-x)^2 + (1-y)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

   což je Yagerova t-norma s parametrem $p = 2$ (obr. 2).



Obrázek 2. Graf výsledné t-normy, která byla modelována na základě empirických dat.

2. *Druhým cílem bylo zjistit, zda lidé chápou konjunkci jako komutativní operaci.* Z obdržených dotazníků plyne, že v asi 56 % případů byla konjunkce vyhodnocena jako komutativní operace. Respondenti nejčastěji chápali konjunkci jako komutativní operaci v dotazníku u otázek 5 a 10 (viz. přiložené materiály). Naopak nejméně často u otázek 1 a 20. Otázkou však je, do jaké míry byli respondenti ovlivněni znalostí klasické logiky a jak by výsledek vypadal u méně technicky zaměřených respondentů.

5. Závěr

V článku jsme se zabývali modelováním fuzzy logické konjunkce na základě empirických dat. Hlavním přínosem práce je nalezení algoritmu pro aproximaci aditivního generátoru na základě empirických dat. Tento algoritmus může nalézt uplatnění v oblasti fuzzy řízení. Pomocí algoritmu jsme dále provedli vyhodnocení experimentu, který si kladl za cíl nalézt matematický předpis fuzzy konjunkce ve významu užívaném lidmi.

Z výsledků experimentu vyplynulo, že konjunkce používaná lidmi nejvíce odpovídá Yagerově t-normě T_2^Y. Tento výsledek lze v praxi využít při konstrukci vícehodnotové logiky, která odpovídá lidskému chápání. Vzhledem k tomu, že Yagerovy t-normy jsou izomorfní s Lukasiewiczovou t-normou, má smysl se zabývat otázkou, do jaké míry jsou logiky určené zmíněnými t-normami podobné. Dále jsme zjistili, že konjunkci respondenti označili jako komutativní operaci asi v 56 % případů. Tato hodnota však bude patrně závislá na vzorku respondentů.

V dalším pokračováním práce je možné se zabývat aproximací agregačních operátorů, což lze mj. využít v oblasti doporučovacích systémů.

Literatura

[1] Clandi Alsina; Berthold Schweizer; Maurice J. Frank. *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*. World Scientific, Singapur, 2006. ISBN: 981-256-671-6.

[2] Gleb Beliakov. Fitting triangular norms to empirical data. In *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, pages 261 – 272. Elsevier, 2005. ISBN: 0-444-51814-2.

[3] Kenneth I. Joy. Definition of a b-spline curve, 2010. http://cs.unc.edu/~dm/UNC/COMP258/LECTURES/B-spline.pdf.

[4] Ake Björck. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996. ISBN: 978-0-898713-60-2.

[5] Donghui Chen; Robert J. Plemmons. Nonnegativity constraints in numerical analysis. In *The Birth of Numerical Analysis*, pages 109 – 139. World Scientific, Singapur, 2010. ISBN: 978-981-283-625-0.