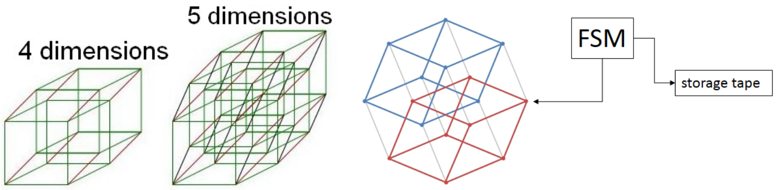
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

Excel@FIT 2017
http://excel.fit.vutbr.cz

Multidimensionální automaty

Zdeněk Hladík*




```
B3,b,*->R,R,0,nomove
B4,b,*->R,R,0,nomove
B4,a,4->B4,3,0,-1,nomove
B4,a,3->B4,2,0,-1,nomove
B4,a,2->B4,1,-1,nomove
B4,a,1->B4,0,-1,nomove
B4,a,0->B5,#,0,left
```

Abstrakt
Cílem tohoto článku je představení vyvinutého konceptu multidimensionálních automatů, schopných analyzovat data o libovolné dimensionalitě. Automaty jsou definovány za využití dřívějších publikací autora zahrnujících práci s dvoudimensionálními automaty, u nichž byla dokázána praktická využitelnost ve zpracování dat. V rámci této práce je vyvinuto několik druhů automatů a obdob Turingových strojů schopných analyzovat libovolné multidimensionální řetězce. Zároveň je součástí práce i simulátor dvou těchto automatů, demonstrující jejich fungování. V článku je uvedeno několik oblastí vhodných pro nasazení představených automatů. Po vzoru dvoudimensionálních automatů se jedná především o zpracování a analýzu dat.
Klíčová slova: multidimensionální automaty — multidimensionální jazyky — simulátor

Přiložené materiály: Simulátor

*xhladi17@stud.fit.vutbr.cz, *Faculty of Information Technology, Brno University of Technology*

1. Úvod

Téma dvoudimensionálních automatů bylo již v oblasti teoretické informatiky diskutováno mnohokrát, například v článcích [1], [2] a [3]. Zároveň byly příslušné automaty hlavním tématem autorova článku, prezentovaného na předchozím ročníku Excel@FIT 2015, a příslušné absolventské práce. Také v této práci jsou tyto automaty a jim příslušné jazyky definovány pro následné odvození jejich multidimensionálních variant.

Multidimensionální jazyky a automaty představují poměrně nový pojem, jejich definice v tomto článku nejsou převzaty a jsou vybudovány postupem mezi dimenzionalitou, který je v tomto článku nastíněn. Jedná se o zajímavý příspěvek pro teoretickou informatiku, jelikož podobné modely nebyly zatím hlouběji prozkoumány.

Zároveň se jedná o potenciálně prakticky přínosné koncepty. Vzhledem k důkazu praktické využitelnosti dvoudimensionálních automatů v předchozích autorových publikacích by automaty představené v této práci mohly nalézt využití v mnoha oborech. Příklady těchto využití pak lze nalézt v sekci 5.

Příkladem užitečnosti těchto automatů může být fakt, že standardní automaty lze využívat například k analýze rozsáhlých dat a vyhledávání v těchto datech, jak je demonstrováno například ve článku [4]. V dnešním data-centrickém světě je pak nalezení efektivních přístupů k hledání relevantních informací ve velkém objemu dat důležitým cílem. Multidimensionální obdoby automatů, používaných v architekturách uvedených v daném článku, by pak mohly pracovat na vyšší úrovni abstrakce a analyzovat data s libovolně zvolenou dimensionalitou.

Úkolem tohoto článku je tyto automaty definovat a demonstrovat za použití pojmů z předchozích prací. Zároveň s nimi jsou definovány i ostatní multidimensionální obdoby pojmů z oblasti formálních jazyků, jako jsou řetězce, řetězcové operace a jazyky.

V práci je také popsána aplikace dovolující simulovat chod dvou zástupců multidimensionálních automatů nad řetězci s libovolnou dimensionalitou. Úkolem této aplikace je pomocí grafického výstupu demonstrovat principy definovaných automatů pro jejich lepší pochopení a umožnění vytvoření vlastních automatů.

V části 2 jsou uvedeny základní pojmy z oblasti formálních jazyků, použité pro následnou definici multidimensionálních jazyků v sekci 3 a automatů v sekci 4. Příklady využití a popis vyvinuté aplikace lze nalézt v sekci 5.

2. Předchozí práce

V této sekci je čtenáři poskytnut přehled teorie nutné pro vytvoření definic v sekcích 3 a 4. Jedná se o už zmíněné dvoudimensionální jazyky a automaty a jejich třídimensionální verze. Teorie je vzhledem k rozsahu práce popsána stručně. Definice byly z většiny převzaty z práce [5].

2.1 Dvoudimensionální jazyky a automaty

Za základní článek pro tuto teorii lze pokládat článek [2], představující druh automatu operujícího nad dvoudimensionální páskou.

Pojem abecedy zůstává pro libovolnou dimensionalitu stejný, ovšem oproti klasickým řetězcům se liší následující definice:

Definice 1. *Dvoudimensionální řetězec (nebo obraz) nad abecedou Σ je dvoudimensionální obdélníkové pole skládající se z elementů abecedy Σ. Množinu všech těchto obrazů značíme Σ^{**}.*

Obraz je tedy dvourozměrnou obdobou řetězce mající oproti řetězci dva rozměry, a to *výšku* a *šířku*. Takovou dvojici nezáporných celých čísel označujeme jako *velikost obrazu*. Například obraz C v tabulce 1 má velikost (3,3). Obrazy C a D v tabulkách 1 a 2 jsou obrazy nad abecedou $\Sigma = \{a,b,c,d\}$.

a	c	a
d	b	c
d	c	c

Tabulka 1. Obraz C

a	c	b
d	a	c
a	b	a

Tabulka 2. Obraz D

Kromě zvýšení počtu rozměrů obrazu pak dochází i ke zvýšení počtu řetězcových operací. Pokud se zaměříme na operaci *konkatenace*, je nutná specializace této operace. Definice tzv. *konkatenace řádkové* a *konkatenace sloupcové* jsou uvedeny níže. Nad obrazy lze navíc provádět například operaci rotace či transpozice, které nelze použít u klasických řetězců.

Definice 2. *Řádková konkatenace obrazů C a D (značena $C \ominus D$) je operace, definovaná pouze pro obrazy se shodnou šířkou. Výsledek konkatenace je zobrazen tabulkou 3.*

Definice 3. *Sloupcová konkatenace obrazů C a D (značena $C \odot D$) je operace, definovaná pouze pro obrazy se shodnou výškou. Výsledek konkatenace je zobrazen tabulkou 4.*

a	c	a
d	b	c
d	c	c
a	c	b
d	a	c
a	b	a

Tabulka 3. Obraz $C \ominus D$

a	c	a	a	c	b
d	b	c	d	a	c
d	c	c	a	b	a

Tabulka 4. Obraz $C \odot D$

Pojem jazyka zůstává stejně, jako tomu bylo u abecedy, bez podstatných změn. Definice je následující:

Definice 4. *Dvoudimensionální jazyk nad abecedou Σ je podmnožinou Σ^{**}.*

Co se týče ostatních pojmů známých z oblasti klasických formálních jazyků, pro dvoudimensionální jazyky existuje pojem regulárních výrazů, které generují obrazy. Jejich definici lze nalézt například v článku [1]. Dále existuje mnoho druhů formálních gramatik, umožňujících definovat množiny obrazů. Zajímavé zástupce lze nalézt v článcích [3], [6], [7], [8] a [9].

Pro nás nejzajímavějším konceptem jsou *dvoudimensionální automaty*, které umožňují analýzu obrazů a ověření náležitosti těchto obrazů do daného jazyka. Dále uvádíme definice dvou zástupců těchto automatů.

Definice 5. Čtyřsměrný automat, *označován jako $4DFA$, je sedmice $\Lambda = (\Sigma, Q, \Delta, q_0, q_a, q_r, \delta)$, kde:*

Σ je vstupní abeceda, kde $\# \notin \Sigma$ je hraniční symbol,
Q je konečná množina stavů,
$\Delta = \{R, L, U, D\}$ je množina směrů,
$q_0 \in Q$ je počáteční stav,
$q_a, q_r \in Q$ jsou akceptující a odmítající stav,
$\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Sigma \cup \{\#\} \rightarrow Q \times \Delta$ je přechodová funkce.

Uvedený automat $4DFA$ je základním konceptem pro dvoudimensionální automaty. Jedná se o modifikaci dvoudimensionálního Turingova stroje bez možnosti měnit obsah analyzovaného obrazu. Pro správný chod automatu je vstupní obraz brán jako dvoudimensionální páska s ohraničujícími symboly. Po této pásce se automat od souřadnic $(1,1)$ pohybuje čtyřmi možnými směry: *right, left, up, down*, v definici označenými prvními písmeny jejich názvů. V článku [2] je demonstrována síla tohoto automatu.

Následuje definice *dvoudimensionálního Turingova stroje*, jak je uvedena v článku [10]. Jedná se o standardní podobu Turingova stroje analyzujícího obrazy, z něhož jsou kromě předchozího automatu odvozeny některé další automaty. Mezi tyto automaty patří například *Sgraffito automat* z článku [10]. Na rozdíl od $4DFA$ disponuje Turingův stroj navíc pohybem *zero* (značeno Z), což znamená žádný pohyb hlavy.

Definice 6. *Dvoudimensionální Turingův stroj (2TM) je sedmice $\mathscr{M} = (Q, \Sigma, \mathscr{H}, \Gamma, \delta, q_0, Q_F)$, kde:*

- *Σ je vstupní abeceda, kde $\mathscr{S} \cap \Sigma = \emptyset$ je množina hraničních symbolů,*
- *Γ je pásková abeceda, kde $\Sigma \subseteq \Gamma$,*
- *Q je konečná, neprázdná množina stavů,*
- *$\mathscr{H} = \{R, L, U, D, Z\}$ je množina směrů,*
- *$q_0 \in Q$ je počáteční stav,*
- *$Q_F \subseteq Q$ je množina koncových stavů a*
- *$\delta : (Q \setminus Q_F) \times (\Gamma \cup \mathscr{S}) \to 2^{Q \times (\Gamma \cup \mathscr{S}) \times \mathscr{H}}$ je přechodová funkce.*

V této sekci bylo definováno několik základních pojmů, které se týkají problematiky dvoudimensionálních automatů. V další sekci jsou tyto pojmy upraveny pro třídimensionální prostor, tedy jazyky, které obsahují *tělesa*.

2.2 Třídimensionální jazyky a automaty

V této sekci je stručně nastíněn koncept třídimensionálních jazyků a automatů. Jedná se o teorii vyvinutou z předchozích pojmů dvoudimensionálních jazyků. Třídimensionální jazyky pak zde tvoří mezistupeň, ukazující postup od dvoudimensionálních po multidimensionální jazyky.

Základním prvkem třídimensionálních jazyků je třídimensionální řetězec, tedy *těleso*. Toto těleso disponuje obměnami oproti obrazu, stejně, jako tomu je u obrazu oproti řetězci.

Těleso má tak logicky celkem tři rozměry, trojice těchto nezáporných celých čísel se stejně jako u obrazu nazývá *velikost*. Množinu všech těles nad danou abecedou Σ pak značíme Σ^{***}.

Stejně, jako tomu bylo u dvoudimensionálních jazyků, i zde se navyšuje počet operací. Vyskytují se zde tři druhy konkatenací, každá ve směru dané osy. Stejně tak se zvyšuje díky více možným osám i počet druhů operace rotace. Jazyky, které mohou být určeny i pomocí těchto operací, jsou pak definovány následovně:

Definice 7. *Třídimensionální jazyk nad abecedou Σ je podmnožinou Σ^{***}.*

Výše definované jazyky pak lze popsat několika mechanismy, stejně jako jazyky dvoudimensionální. Koncept *třídimensionálních regulárních výrazů* ovšem zatím nebyl definován, i když za pomoci zde uvedených operací s tělesy by sestavení definice nebylo složité. Takové regulární výrazy by pak vystihovaly třídu *regulárních jazyků těles*.

Dalším možným mechanismem pro definici jazyků těles jsou tzv. *spatial grammars*. Třídimensionální gramatiky jsou (na rozdíl od dvoudimensionálních) poměrně novým tématem pro teoretickou informatiku.

I přesto byla například v práci [11] přednesena myšlenka navrhující použití interaktivních třídimensionálních gramatik v modelářských systémech. Gramatiky umožňující generovat třídimensionální tvary jsou náplní i další práce: [12].

Posledním a pro nás nejzajímavějším modelem pro definici jazyků těles jsou *třídimensionální automaty*. Následuje definice automatu, který představuje základní model pro tuto třídu automatů. Jedná se o automat, vyvinutý upravením zde již představeného automatu $4DFA$. Automatu byly doplněny směry pro možnost pohybu ve třetí dimenzi, a tak je schopný pohybovat se po celém vstupním tělesu.

Definice 8. *Šestisměrný automat, označován jako $6-FA$, je sedmice $\Lambda = (\Sigma, Q, \Delta, q_0, q_a, q_r, \delta)$, kde:*

- *Σ je vstupní abeceda, kde $\# \notin \Sigma$ je hraniční symbol,,*
- *Q je konečná množina stavů,*
- *$\Delta = \{E, W, N, S, U, D\}$ je množina směrů,*
- *$q_0 \in Q$ je počáteční stav,*
- *$q_a, q_r \in Q$ jsou akceptující a odmítající stavy,*
- *$\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times (\Sigma \cup \{\#\}) \to Q \times \Delta$ je přechodová funkce.*

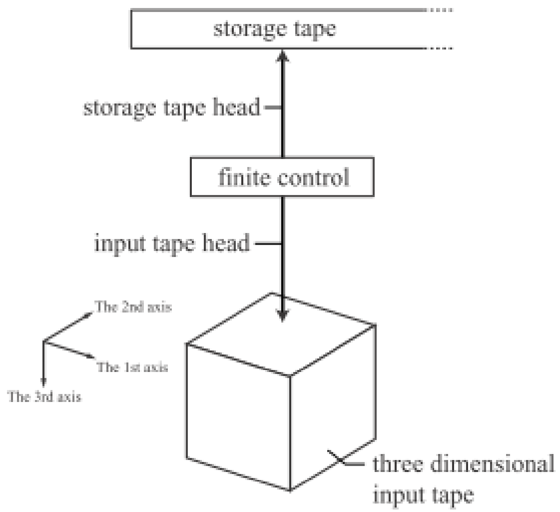
Dále je uvedena definice *třídimensionálního Turingova stroje*, převzatá z článku [13]. Na rozdíl od dříve uvedeného dvoudimensionálního Turingova stroje tento stroj neupravuje obsah vícedimensionální pásky, kterou je v tomto případě analyzované těleso.

Pro zápis informací totiž disponuje dodatečnou *ukládací páskou*. Jedná se o změnu provedenou především kvůli jednoduššímu definování pravidel. Důkaz ekvivalence síly tohoto stroje s obdobou bez ukládací pásky je uveden v příslušném článku. Obrázek 1 ukazuje tento automat.

Definice 9. *Třídimensionální Turingův stroj (3-TM) je šestice $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \delta)$, kde:*

- *Q je konečná množina stavů,*
- *$q_0 \in Q$ je počáteční stav,*
- *$F \subseteq Q$ je množina konečných stavů,*
- *Σ je konečná vstupní abeceda (kde $\# \notin \Sigma$ je hraniční symbol),*
- *Γ je konečná abeceda ukládací pásky ($B \in \Gamma$ je prázdný symbol) a*

$\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\#\}) \times \Gamma) \times (Q \times (\Gamma \setminus \{B\}) \times \{east, west, south, north, up, down, nomove\} \times \{right, left, nomove\})$ *je relace dalšího kroku.*



Obrázek 1. 3-TM (zdroj: [13])

3. Multidimensionální jazyky

V této sekci je na základě pojmů definovaných v sekci 2 představen koncept *multidimensionálních jazyků.*

Tyto jazyky mají za prvky řetězce, u nichž nemusí být explicitně určena dimensionalita. Může se tedy jednat o tělesa, obrazy a řetězce, ale také o prvky s mnohem vyšším počtem dimenzí. Takové multidimensionální řetězce nazýváme *buňky* a jsou definovány následovně:

Definice 10. *Multidimensionální řetězec (neboli buňka) s je konečné uskupení symbolů abecedy* Σ *takové, že* $s \in \Sigma^{*^n}$, *pro* $n \geq 1$.

V předchozí definici si lze všimnout, že množinu všech multidimensionálních buněk značíme Σ^{*^n}. Jelikož nemusí být pro buňku určena její dimensionalita, nelze určit velikost n-tice s jejími rozměry. Proto definujeme následující funkci:

Definice 11. *Rozměrová funkce (značíme* Φ*), kde* $\Phi : \Sigma^{*^n} \to \mathbb{N}^n$, *navrací pro danou buňku její n-tici rozměrů.*

V sekcích 2.1 a 2.2 je zmíněno, že počet operací nad řetězci je ovlivněn počtem dimenzí daných řetězců. Například počet různých druhů operace konkatenace je rovný počtu dimenzí. To pro multidimensionální řetězce znamená, že počet operací nad nimi proveditelnými je nekonečný, jelikož počet dimenzí těchto řetězců není shora omezen žádnou hodnotou.

Pokud totiž například klasický řetězec chápeme jako obraz, jehož jeden rozměr má velikost 1, lze s ním provést operaci rotace i řádkovou konkatenaci. V tomto oboru vnímáme všechny druhy buněk jako řetězce dimensionalitou o velikosti libovolného kladného čísla, proto můžeme nad jakoukoliv buňkou provést libovolnou operaci.

Multidimensionální jazyky pak už klasicky definujeme takto:

Definice 12. *Multidimensionální jazyk L je množina multidimensionálních řetězců, neboli buněk. Je podmnožinou množiny* Σ^{*^n}, *pro* $n \geq 1$.

Zajímavým faktem pro tyto jazyky je, že multidimensionální jazyk může díky libovolné dimensionalitě buněk obsahovat zároveň řetězce, obrazy i tělesa a jiné vícedimensionální řetězce.

To je velmi důležité při popisu těchto jazyků pomocí gramatik a automatů. Také tato vlastnost představuje výzvu pro vytvoření takových gramatik a automatů, které budou schopné analyzovat zároveň například tělesa a obrazy. Jelikož se však tato práce zaměřuje primárně na představení *multidimensionálních automatů*, nebude zde zástupce takových gramatik definován.

4. Multidimensionální automaty

V této sekci jsou popsáni dva základní zástupci *multidimensionálních automatů*. Tyto vyvinuté automaty dokáží analyzovat výše definované buňky s libovolnou dimensionalitou.

K tomu musí tyto automaty disponovat například směry pohybu umožňujícími hlavě automatu pohybovat se v libovolné dimenzi. Počet takových směrů je tedy nekonečný a není vhodné tyto směry označovat písmeny, jak tomu bylo u dvoudimensionálních a třídimensionálních automatů.

Proto jsou pohyby označeny vektory čísel, jejichž tvar je určen v definici 13, která definuje základní podobu *multidimensionálního Turingova stroje*, odvozeného z definice 9. Pojem multidimensionálního Turingova stroje byl nastíněn už článkem [14], nicméně zde se jedná o zástupce vystavněného na výše definovaných strojích s nižší dimensionalitou.

Definice 13. *Multidimensionální Turingův stroj (M-TM) je sedmice* $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, W, \delta)$, *kde:*

Q je konečná množina stavů,
$q_0 \in Q$ *je počáteční stav,*
$F \subseteq Q$ *je množina konečných stavů,*
Σ *je konečná vstupní abeceda (kde* $\boxtimes \cap \Sigma = \emptyset$ *je množina hraničních symbolů),*
Γ *je konečná abeceda ukládací pásky (*$B \in \Gamma$ *je prázdný symbol),*

W je množina směrů, kdy $W \subseteq \{-1,0,1\}^n$ a $\forall w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W$ platí $1 \leq i \leq n : \exists w_i = \pm 1 \wedge (\forall j, 1 \leq j \leq n, j \neq i : w_j = 0)$,
$\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \boxtimes) \times \Gamma) \times (Q \times (\Gamma \setminus \{B\}) \times (W \cup \{nomove\}) \times (right, left, nomove))$ je relace dalšího kroku.

Následuje také definice automatu, který má v tomto článku obdoby pro každou z uvedených dimensionalit. *Vícesměrný multidimensionální automat* disponuje stejnou nekonečnou množinou pohybů jako již definovaný Turingův stroj.

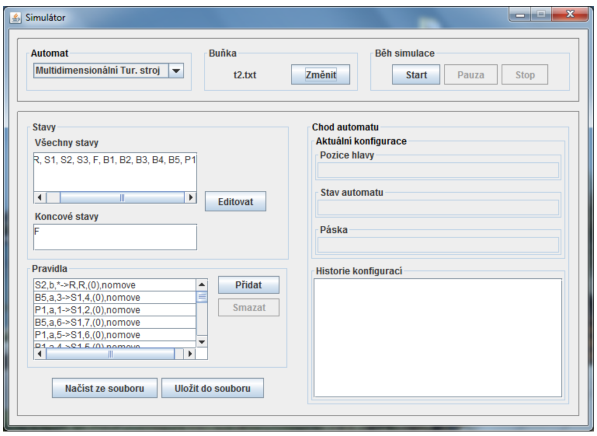
Definice 14. *Vícesměrný multidimensionální automat, označován jako $M - MWFA$, je sedmice $M = (\Sigma, Q, W, q_0, q_a, q_r, \delta)$, kde:*

Σ je vstupní abeceda,
Q je konečná množina stavů,
W je množina směrů, totožná s W v definici 13,
$q_0 \in Q$ je počáteční stav,
$q_a, q_r \in Q$ jsou akceptující a odmítající stavy,
$\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times (\Sigma \cup \boxtimes$ (taktéž z definice 13) $) \rightarrow Q \times W$ je přechodová funkce.

5. Simulátor a využití

Aby mohlo být fungování zde definovaných multidimensionálních automatů lépe pochopeno, byla vyvinuta aplikace simulující tyto automaty.

Aplikace disponuje grafickým uživatelským rozhraním, které poskytuje možnost definice vlastního automatu a pozorování jeho výstupů při analýze multidimensionální buňky. Toto rozhraní je na obrázku 2.



Obrázek 2. Hlavní obrazovka simulátoru

Simulovány jsou oba zde uvedené automaty, i když aplikace je přizpůsobena k přidání dalších automatů v budoucnosti. Buňky, které tato aplikace umožňuje analyzovat, jsou uloženy jako textové soubory. Aplikaci spolu s návodem k použití a několika demonstračními příklady, které obsahují definice automatů a buněk, lze stáhnout z odkazu na první straně této práce.

5.1 Příklady použití

Zde jsou uvedeny některé praktické obory, ve kterých by mohly multidimensionální automaty najít uplatnění.

OLAP systémy: Databázové systémy využívající technologii OLAP (*Online Analytical Processing*), sloužící k analýze dat a získávání znalostí, často využívají multidimensionální model k reprezentaci dat (viz [15]). Tento model dat má samozřejmě proměnlivou dimensionalitu dle složitosti zobrazovaných dat. Pro analýzu těchto multidimensionálních kostek by mohly být použity i multidimensionální automaty.

Identifikace obličeje: Ve více vědeckých článcích z pole biometrie se objevuje pojem *„face space“* (např. [16]). Jedná se o multidimensionální prostor s body reprezentujícími tváře lidí. Pozice bodu v prostoru je určena různými metrikami odpovídající tváře, jako je vzdálenost očí od sebe, od kořene nosu, výška úst atd. Nalezení obličeje a analýza takového prostoru by opět byly vhodné případy pro použití multidimensionálních automatů.

Virtuální realita: Virtuální realita představuje v základě modelovaný třídimensionální prostor, v němž se nachází uživatel. Pro vyšší počet, konkrétně čtyři dimenze, pak můžeme modelovat virtuální realitu, která je v rámci času dynamická a nabízí lepší simulační dojem. Pokud takovou realitu doplníme například scénáři chování uživatele, kdy volba uživatele ovlivní vývoj prostředí v budoucnu, a takovýchto voleb může být více, dostáváme multidimensionální systém. Ten logicky může být analyzován a prohledáván multidimensionálními automaty kvůli hledání chyb a konfliktů jednotlivých scénářů.

6. Závěr

Tato práce představila nové zástupce automatů, které mohou sloužit k analýze objektů s libovolnou dimensionalitou. Tyto automaty a jazyky, které definují, byly vystavěny na existujících dvoudimensionálních obdobách, rovněž uvedených v tomto článku.

Spolu s definicí multidimensionálních jazyků byli uvedeni dva zástupci vyvinutých automatů, kteří umožňují pohyb v libovolné dimenzi a tak analýzu libovolné buňky, tedy multidimensionálního řetězce.

Pro demonstraci těchto automatů byl vyvinut i program, který umožňuje simulaci jejich chodu při analýze buňky na vstupu. Aplikace disponuje grafickým rozhraním, umožňujícím jednoduchou definici automatu a pozorování jeho výstupů.

Stejně, jako tomu bylo již dříve dokázáno u dvoudimensionálních jazyků v oblasti analýzy registračních značek, je možné multidimensionální automaty vhodně využít v praxi. V článku byly uvedeny příklady jako analýza v OLAP datových skladech či využití při biometrickém zabezpečení.

Teorie multidimensionálních automatů a jazyků bude do budoucna podrobněji rozebrána v dalších článcích. Jedná se o poměrně zajímavou oblast teoretické informatiky, která by mohla po vzoru dvoudimensionálních automatů najít i své praktické uplatnění.

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu své práce, profesoru Alexanderu Medunovi, za jeho čas a nápady.

Literatura

[1] Dora Giammarresi and Antonio Restivo. *Two-Dimensional Languages*, pages 215–267. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1997.

[2] M. Blum and C. Hewitt. Automata on a 2-dimensional tape. In *Switching and Automata Theory, 1967. SWAT 1967. IEEE Conference Record of the Eighth Annual Symposium on*, pages 155–160. IEEE Publishing, 1967.

[3] A. Rosenfeld and W. Rheinboldt. *Picture Languages: Formal Models for Picture Recognition*. Elsevier Science, 2014.

[4] K. Atasu. Leftmost longest regular expression matching in reconfigurable logic. In *2015 International Conference on Field Programmable Technology (FPT)*, pages 17–23, Dec 2015.

[5] Zdeněk Hladík. Dvoudimensionální konečné automaty a jejich aplikace, 2014.

[6] Zbyněk Křivka, Carlos Martín-Vide, Alexander Meduna, and K. G. Subramanian. *A Variant of Pure Two-Dimensional Context-Free Grammars Generating Picture Languages*, pages 123–133. Springer International Publishing, Cham, 2014.

[7] Rani Siromoney. On equal matrix languages. *Information and Control*, 14(2):135–151, 1969.

[8] Gift Siromoney, Rani Siromoney, and Kamala Krithivasan. Picture languages with array rewriting rules. *Information and Control*, 22(5):447 – 470, 1973.

[9] Rani Siromoney and Kamala Krithivasan. Parallel context-free languages. *Information and Control*, 24(2):155 – 162, 1974.

[10] Daniel Průša and František Mráz. Two-dimensional sgraffito automata. In *Proceedings of the 16th International Conference on Developments in Language Theory*, DLT'12, pages 251–262, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer-Verlag.

[11] Frank Hoisl and Kristina Shea. An interactive, visual approach to developing and applying parametric three-dimensional spatial grammars. *Artificial Intelligence for Engineering Design, Analysis and Manufacturing : AI EDAM*, 25(4):333–356, 11 2011.

[12] Katsunobu Imai, Yukio Matsuda, Chuzo Iwamoto, and Kenichi Morita. A three-dimensional uniquely parsable array grammar that generates and parses cubes. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 46:339 – 354, 2001.

[13] Makoto Sakamoto, Naoko Tomozoe, Hiroshi Furutani, Michio Kono, Takao Ito, Yasuo Uchida, and Hidenobu Okabe. A survey of automata on three-dimensional input tapes. *science*, 1:14, 2008.

[14] Michael C. Loui. Simulations among multidimensional turing machines. *Theoretical Computer Science*, 21(2):145 – 161, 1982.

[15] E. Thomsen. *OLAP Solutions: Building Multidimensional Information Systems*. Wiley Computer Publishing. Wiley, 2002.

[16] Or Catz, Michal Kampf, Israel Nachson, and Harvey Babkoff. From theory to implementation: Building a multidimensional space for face recognition. *Acta Psychologica*, 131(2):143 – 152, 2009.