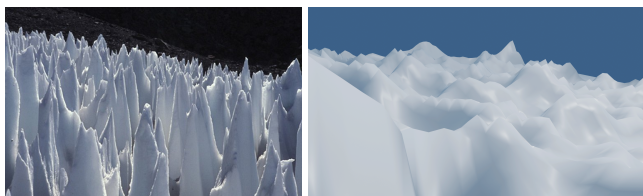


Simulace sněhových a ledových struktur

Ondřej Čech*



Abstrakt

Cílem práce je vytvořit simulaci toho, jak vznikají ledovcové struktury známé jako Kajícníci neboli Penitentes. Tyto útvary vznikají obvykle ve vysokohorském prostředí a podle posledních výzkumů jsou způsobeny odražením slunečního záření uvnitř prohlubní na povrchu ledovce a jejich prohlubování sublimací při teplotách pod bodem mrazu. Byl implementován matematický model popisující toto chování, který vytvořila Meredith D. Betterton. Na tomto modelu byly poté provedeny experimenty, které měly za úkol potvrdit nebo vyvrátit, zda skutečně vede k vytvoření těchto útvarů. Jelikož původní model pracuje pouze s jednotlivými řezy, bylo třeba tento model upravit, aby se ovlivňovaly řezy navzájem.

Vznik těchto útvarů stále není dokonale prozkoumán a práce, které se jím v průběhu let zabývaly, si v některých částech i protiřečí. Přitom vlastnosti těchto struktur zřejmě zpomalují tání ledovce, na kterém se nacházejí, což by v současné době mohly být cenné znalosti.

Klíčová slova: Penitentes — Simulace tání — Ledovcové struktury

Příložené materiály:

*xcecho06@stud.fit.vutbr.cz, Faculty of Information Technology, Brno University of Technology

1. Úvod

Kajícníci jsou struktury z ledu nebo sněhu, které mají podobu tenkých zašpičatělých štítů dosahujících výšky až 5 metrů. Jedná se o skupiny štítů orientovaných obecně ve směru z východu na západ se zdmi obrácenými k severu a jihu. Jejich první popis pochází z třicátých let 19. století, kdy je poprvé uviděl a popsal Charles Darwin. Během času přišli různí vědci s teoriemi jejich růstu, bylo provedeno mnoho měření a pokusů, V současné době obecně panuje přesvědčení, že za vznik může sluneční záření, které ve spolupráci s dalšími podnebními faktory může za úbytek sněhu v okolí, zatímco tato struktura přežívá. V nedávné době se povedl experiment vytvoření kajícníků uměle v laboratoři na základě této teorie.

Význam znalostí vzniku kajícníků spočívá v jejich schopnosti zpomalit tání ledovce, protože tvoří

větší povrch, který se prouděním studeného vzduchu ochlazuje, a rovněž rozdíl mezi teplotami uvnitř prohlubní a na vrcholech mohou vést k tomu, že část odpařené vody v prohlubních opět z kondenzuje na vrcholech a voda tak zůstane v ledovci [1]. Tato práce má za cíl vytvořit na základě známých informací o tomto jevu simulaci vzniku těchto struktur.

2. Kajícníci

Útvary nazývané Kajícníci (španělsky Penitentes) vznikají ve vysoké nadmořské výšce v období ablace, což je časový interval, kdy ledovec ztratí více objemu, než získá. Běžně se vyskytují v Andách mezi Chile a Argentinou v nadmořské výšce 4000 až 5200 metrů nad mořem, také se objevují v Himalájích, pohoří Sierra Nevada, na Kilimandžáru a jiných horách s vy-

18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

33 hovujícím klimatem, rovněž byly takovéto útvary na-
 34 lezeny na Plutu a mohly by se nalézat v rovníkových
 35 oblastech Jupiterova měsíce Europa [2]. Klima, které
 36 vyhovuje růstu Kajícníků lze popsat jako suché, stu-
 37 dené, slunečné a stabilní. Ve výškách nad 5200 metrů
 38 zůstává sníh příliš prašný, aby se v něm mohli kajícníci
 39 vytvořit [3]. Tyto struktury tvoří skupiny štítů oriento-
 40 vaných obecně ve směru z východu na západ se zdmi
 41 obrácenými k severu a jihu, jejich vrcholy se orientují
 42 k zenitálnímu úhlu slunce během poledne, kdy je jeho
 43 záření nejvyšší. Ukázka vyvinutého pole kajícníků
 44 je na obrázku 1. Název kajícníků pochází od jejich
 45 vzhledu, který připomíná účastníky procesí během Ve-
 46 likonočních svátků ve Španělsky mluvících zemích. Ti
 47 jsou oblečeni v dlouhých bílých hábitech a vysokých
 48 špičatých pokrývkách hlavy, nazývaných *capirote*.



Obrázek 1. Pole kajícníků v Andách, Argentina [1].

49 Poprvé tyto útvary popsal britský přírodovědec
 50 Charles Darwin, který se s nimi setkal při cestě ze
 51 Santiago de Chile do Argentinského města Mendoza
 52 v březnu 1835. Podle místních obyvatel za jejich tvor-
 53 bou stojí silné větry [4]. Ohledně jejich vzniku vzniklo
 54 časem několik dalších teorií. Louis Liboutry roku
 55 1954 zjistil, že za vznikem kajícníků stojí sluneční
 56 záření ve chvíli, kdy je rosný bod pod bodem mrazu,
 57 což vede k ablaci ledu sublimací [3]. Roku 2006 Vance
 58 Bergeron, Charles Berger, a M. D. Betterton poprvé
 59 vytvořili kajícníky v laboratoři [5]. Ve velkém mrazáku
 60 zakrytém plexisklem svítily na kus ledu, přičemž vz-
 61 duch vcházející dovnitř byl chlazen tekutým dusíkem.
 62 Jako zdroj záření byl použit světlomet, světelný zdroj
 63 umístěný v zrcadlovém odrazeči, který směřuje všechny
 64 paprsky záření stejným směrem. Během několika
 65 hodin se na ledu objevily 1–5 cm vysoké ostny. Po-
 66 dobné experimenty prováděl už ve třicátých letech
 67 německý geolog Carl Troll, který za suché chladné
 68 noci svítil na čerstvý sníh žárovkou [3].

69 Proces, který vede ke vzniku kajícníků se nazývá
 70 diferenciální ablace. Při ní mění některé části sněhu
 71 své skupenství rychleji než jiné. Na počátku je silná

vrstva sněhu, která není dokonale rovná, jsou v ní 72
 propadliny. Na tento sníh dopadá sluneční záření, 73
 které je zachycováno vícenásobnými odrazy mezi zdmi 74
 těchto sníženin více, než jinde. Tento jev se nazývá 75
 pozitivní zpětná vazba. Jak již bylo zmíněno, klíčový 76
 faktor pro tvorbu kajícníků je rosný bod pod bodem 77
 mrazu. Takto nevzniká voda v tekutém skupenství, ale 78
 sníh sublimuje, což je energeticky náročnější, a výdej 79
 této energie vede k ochlazení ledovce. Propadliny 80
 se vlivem větší přijaté energie prohlubují, stávají se 81
 téměř černým tělesem, které pohlcuje téměř všechno 82
 světlo, co na něj dopadá. Zároveň uvnitř roste hodnota 83
 rosného bodu, která se může dostat až nad bod mrazu, 84
 a sníh uvnitř začne tát. Oproti tomu vrcholy kajícníků 85
 stále jen sublimují a jejich strmé stěny zachytí jen 86
 velmi málo slunečního záření. Jedním z dalších fak- 87
 torů ovlivňujících růst kajícníků je znečištění. Tmavé 88
 nečistoty pohlcují sluneční záření, ale velmi záleží na 89
 síle vrstvy těchto nečistot. Tenkou vrstvou část záření 90
 projde, ale už se neodrazí zpět, což ablaci urychluje, 91
 naopak moc silná vrstva znečištění ablaci zpomaluje, 92
 protože záření se na sníh nedostane. V rámci lab- 93
 oratorního pokusu popsaného dříve také jeho autoři 94
 zkusili posypat led tenkou vrstvou sazí. Na vrcholcích 95
 tvořících se kajícníků se saze koncentrovaly a tvořily 96
 tak stále silnější vrstvu, která je začala chránit před 97
 zářením. V prohlubních se zvětšovala plocha a tedy 98
 se koncentrace sazí snižovala. Toto vedlo k rych- 99
 lejší tvorbě útvarů, jelikož vrcholy tály ještě poma- 100
 leji, než kdyby byly z čistého sněhu, zatímco údolí 101
 se prohlubovala zhruba stále stejně rychle. V přírodě 102
 tímto způsobem vznikají takzvané *dirt cones*, známé 103
 například z Islandu díky časté sopečné aktivitě, která 104
 vede k pokrytí ledovce sopečným prachem. 105

3. Jednorozměrný matematický model 106

Matematický model vzniku kajícníků vytvořila Mere- 107
 dith D. Betterton [6]. Tento model uvažuje sluneční 108
 záření jako primární zdroj tepla. Model se skládá 109
 ze dvou částí: výpočtu sněhové ablace a odrazivos- 110
 ti světla. Teplo, které dopadá na povrch, vede k ablaci. 111
 Výška povrchu h se snižuje, jak led taje nebo sub- 112
 limuje. Předpokládá se, že odtátý led se vsákne nebo 113
 vypaří, tedy nedochází k toku vody po povrchu a jejímu 114
 opětovnému zmrznutí. Bohužel se nepodařilo jiné 115
 práce se stejným zaměřením, a není ani známo, že by 116
 byl zde popsán model nějak implementován. 117

Tento model počítá výšku ledové vrstvy $h(x)$ v 118
 daném bodě na základě diferenciální rovnice: 119

$$\frac{\delta h}{\delta t} = \frac{P(x)}{L} + D \frac{\delta^2 h}{\delta x^2}, \quad (1)$$

která popisuje změnu výšky ledu v čase v závislosti 120

121 na světelném záření a tvaru ledu. $P(x)$ je množství en-
 122ergie přijaté v daném okolí bodu x , L je latentní teplo,
 123 potřebné k ablaci objemové jednotky ledu. Latentní
 124 teplo je uvažováno jako konstantní, což je zjednoduše-
 125 ní, jelikož teplota, hustota sněhu a vlhkost vzduchu se
 126 mohou v různých místech lišit. Byla vybrána hodnota
 127 $L = 10^9 \text{ erg cm}^{-3}$. *Erg* je jednotka energie v sou-
 128stavě CGS, kde je její rozměr $\text{g cm}^2 \text{s}^{-2}$. Odpovídá tedy
 129 hodnotě 10^{-7} J . Bez vyhlazovacího členu $\frac{\delta^2 h}{\delta x^2}$ může
 130 model tvořit libovolně malé struktury, což neodpovídá
 131 realitě. Proto je třeba mít nějakou velikost nejmenší
 132 vytvořitelné struktury. Přirozeným omezením je na-
 133 příklad délka zániku slunečního světla, která definu-
 134je tloušťku sněhové vrstvy, ve které probíhá rozptyl
 135světla. D je difúzní konstanta a její hodnota byla
 136 vybrána $2,5 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$.

137 Světlo dopadá na povrch přímo seshora a přenáší
 138 energii. Tato energie je konstantní vůči ploše kolmé
 139 na směr paprsků. Při dopadu na led se část světla
 140 odráží. Celkové množství světla Φ odraženého z inter-
 141valu okolo bodu x_1 do intervalu mezi body x a x
 142 vypočítáno pomocí rovnice:

$$\Phi = \frac{\alpha I}{\pi} \int d\theta dx_1, \quad (2)$$

143 kde $d\theta$ je úhel s vrcholem v bodě x_1 a rameny do
 144 bodů x a $x + dx$, I je solární konstanta, která udává
 145 intenzitu solárního záření v nejvyšším bodě atmosféry.
 146 Jako typická hodnota konstanty I v jasných slunečných
 147 podmínkách je bráno $10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Parametr α
 148 reprezentující odrazivost povrchu se nazývá *albedo*.
 149 Albedo označuje, jak velká část světla se odrazí, jeho
 150 hodnota byla zvolena $\alpha = 0,5$. Světlo se od sněhu
 151 odráží izotropně, tedy rovnoměrně do všech směrů.
 152 $d\theta$ lze vyjádřit jako:

$$d\theta = \frac{dl}{p} = \frac{|\mathbf{p} \times d\mathbf{s}|}{p} = \frac{\Delta h - \Delta x h'(x)}{\Delta h^2 + \Delta x^2}, \quad (3)$$

153 kde je definován vektor \mathbf{p} , který směřuje z bodu x_1 do
 154 bodu x . Platí:

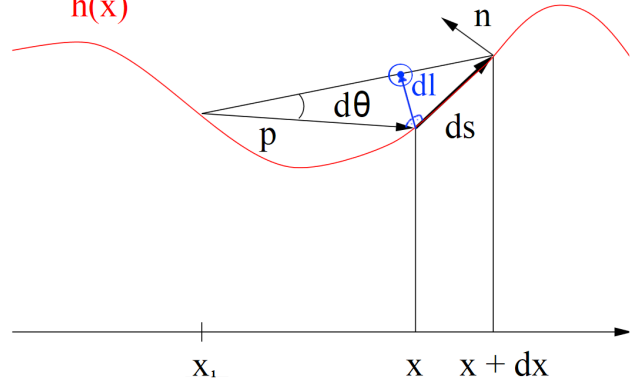
$$p = |\mathbf{p}| = \sqrt{\Delta h^2 + \Delta x^2}. \quad (4)$$

155 Pro zjištění celkové energie odražené do bodu x je
 156 třeba připočítat intenzitu ze všech bodů x okolí bodu
 157 x_1

$$P_r(x) = \frac{\alpha I}{\pi} \int_{\text{line of sight}} \frac{dx_1 (\Delta h - h'(x) \Delta x)}{\Delta h^2 + \Delta x^2}. \quad (5)$$

158 Integrovaná funkce je propagátor intenzity a popisuje,
 159 jak je intenzita přenášena z jednoho bodu do druhého.
 160 Text „line of sight“ (přímá viditelnost) u symbolu in-
 161tegrálu upozorňuje na nelineární omezení viditelnosti,
 162 integruje se pouze přes ty body x_1 , které jsou viditelné

Snow Surface h(x)



Obrázek 2. Schéma ablace povrchu sněhu. Rozptyl
 světla z bodu x_1 do intervalu mezi x a $x + dx$ závisí na
 úhlu $d\theta$. Vektor \mathbf{p} směřuje z bodu x_1 do bodu x
 a vektor $d\mathbf{l}$ je normála na \mathbf{p} tak, že $d\theta = dl/p$. Vektor
 \mathbf{n} je normála k povrchu v bodě x a vektor $d\mathbf{s}$ je
 inkrement podél povrchu mezi x a $x + dx$ [6].

z bodu x , tedy mezi nimi mohou procházet paprsky
 světla.

Celkový model pak kombinuje rovnice světelné
 odrazivosti 5 a ablace 1 takto:

$$\frac{\delta h}{\delta t} = -\frac{\alpha I}{L} \mathcal{J}(x) + D \frac{\delta^2 h}{\delta x^2}, \quad (6)$$

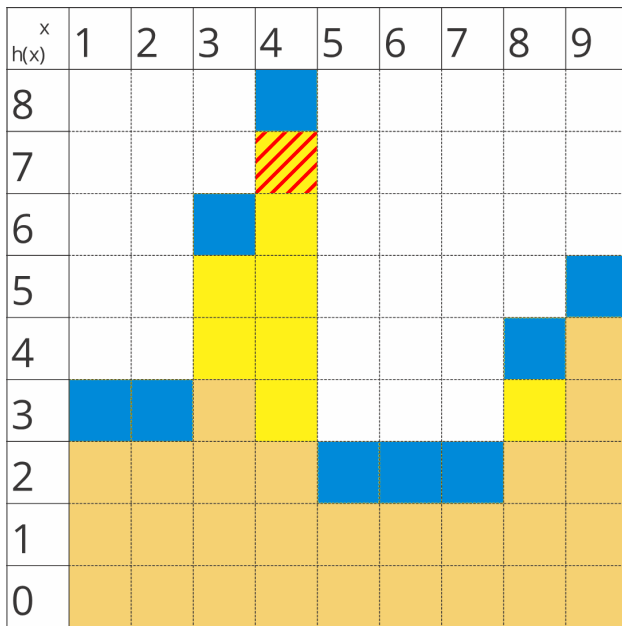
kde je definován integrál

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\text{line of sight}} \frac{dx_1 (\Delta h - h'(x) \Delta x)}{\Delta h^2 + \Delta x^2}. \quad (7)$$

4. Implementace jednorozměrného mod- elu

Výpočet předchozích rovnic je klíčovou částí simulace,
 v každém kroku je pro všechny body povrchu určena
 rychlost klesání. Délka kroku je konstantní čas, jelikož
 se jedná o spojitou simulaci, a z ní bude vypočítána
 změna výšky povrchu v bodě za jeden krok simulace.
 Vstupem simulace je rastrový obrázek ve stupních šedi
 představující výškovou mapu ledové vrstvy.

Jelikož je ale pro potřeby výpočtu nutné znát ze-
 jména povrch této struktury, je třeba vstupní pole výšek
 převést na pole, kde jsou uvedeny všechny body v tako-
 vém pořadí, kudy by vedla diskretizovaná funkce $y =$
 $h(x)$ daného řezu. Bodem je zde myšlen vzorek této
 funkce, který si lze pro potřeby programu představit
 jako kvádr odpovídající voxelu v trojrozměrném ob-
 jektu, jehož délka a šířka je rovna vzdálenosti mezi 2
 sousedními vzorky. Výška kvádrů je 1. Program pos-
 tupně prochází řezem povrchu (může se jednat o řádek
 nebo sloupec v mapě) a ukládá souřadnice těchto bodů.
 Bod je jednoznačně definován svou souřadnicí x a y .
 Popis povrchu pomocí bodů vysvětluje obrázek 3.

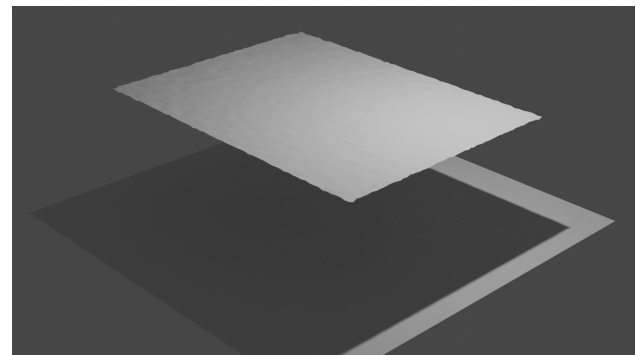


Obrázek 3. Schéma řezu povrchem. Modré a žluté body odrážejí světlo, oranžové jsou uvnitř ledu. Modré body jsou uvedeny ve výškové mapě, žluté body je třeba dopočítat. Při průchodu tímto povrchem je bod s červeným šrafem projit dvakrát, přičemž pokaždé má jiné sousední body a jiné body, které do něj odráží světlo.

189 S povrchem souvisí ještě další potřebný údaj pro
190 výpočty simulace, a to je normála k povrchu v daném
191 bodě. Normála je přímkou kolmá na tečnu, která prochází
192 daným bodem. O tečně je známo, že její směrnice
193 je rovna hodnotě derivace funkce v bodě dotyku. Pro
194 program bude nutné znát normálu jako vektor kolmý
195 na povrch, který směřuje od povrchu do prostoru, kde
196 je vzduch. Zde se opět projevuje výhoda a nutnost
197 ukládání bodů vysvětlena v předchozí části, protože
198 bod na obrázku 3 značený šrafem mající dvě nesou-
199 vislé plochy na povrchu bude muset mít i dvě různé
200 normály pro svůj popis. Je třeba zajistit, že lokální
201 maxima a minima budou mít derivaci rovnou 0 a tedy
202 vodorovné tečny. Oproti vzorci je třeba počítat i se
203 situací, že tečna v bodě bude svislá.

204 V následující části je třeba pro každý bod x povrchu
205 určit ty body, ze kterých na daný bod dopadá odražené
206 světlo. Tyto body jsou označovány jako body viditelné
207 z daného bodu. Viditelné body musejí splňovat několik
208 podmínek. Předně pro vytvoření i následné přijetí
209 odrazu musejí být k sobě přivrácené. Pokud je paprsek
210 světla definovaný jako vektor \mathbf{p} směřující z viditelného
211 bodu x_1 do x , výsledek skalárního součinu vektoru
212 \mathbf{n} kolmého k povrchu v bodě x a vektoru \mathbf{p} musí
213 být menší, než 0. Jen tak dopadne paprsek na bod
214 z vnějšku, nikoliv z vnitřku ledovce. Pravidlo platí
215 obdobně i pro bod x_1 , jelikož v tomto případě vek-

tor \mathbf{p} míří od bodu, skalární součin musí být větší, 216
než 0. I pokud jsou body k sobě přivrácené, může 217
se mezi nimi nacházet překážka, která bude paprsek 218
blokovat. Byl vytvořen jednoduchý systém predikce, 219
zda je bod viditelný, skrytý, nebo je viditelnost nejistá. 220
Body v řezu, u nichž je zkoumaná viditelnost, jsou 221
procházeny ve směrech od bodu x , zprvu je předpo- 222
kládána jejich viditelnost a testuje se, zda jsou k sobě 223
přivrácené. V případě, že nejsou, není jistá viditel- 224
nost následujícího bodu, a kromě přivrácenosti se bude 225
testovat i zda paprsek vyslaný z jednoho bodu do- 226
razí do druhého, nebo narazí na překážku. Bod vyšší 227
než x , kde povrch ve směru od bodu x klesá, značí 228
překážku, která bude stínit minimálně všechny body 229
nižší než výška tohoto bodu. Body vyšší bude poté 230
také potřeba testovat vysláním paprsků. Pokud je při 231
vysílání paprsků nalezen viditelný bod, předpokládá 232
se, že následující bod bude rovněž viditelný, protože 233
se neočekává omezení viditelnosti shora třeba stropem 234
dutiny, kterou nelze výškovou mapou reprezentovat. 235
Ve chvíli, kdy jsou všechny body v řezu rozdělené na 236
viditelné a neviditelné, je pro daný bod vypočítána 237
rychlost klesání povrchu, po určení rychlosti všech 238
bodů je proveden krok simulace. Výsledek je vygener- 239
ován opět výškovou mapou, která je převedena do 240
3D objektu a renderována v programu Blender.

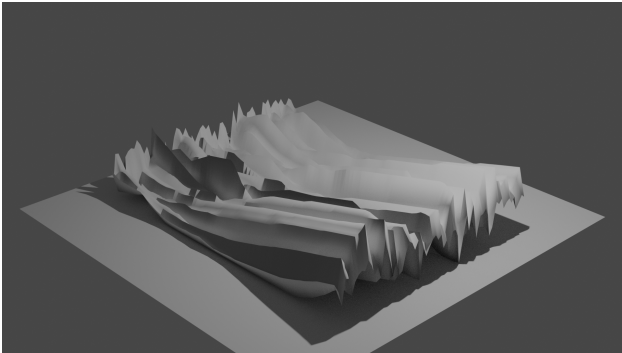


Obrázek 4. Vstup pro simulaci, plocha s drobnými prohlubněmi generovanými šumem pro odstartování tvorby.

241 Na základě vstupu zobrazeného na obrázku 4, což 242
je plocha s jemnými propady vygenerovanými pomocí 243
šumu, produkuje tento model výsledek zachycený na 244
obrázku 5. Zde je vidět hlavní problém využití jed- 245
norozměrného modelu v plošném prostředí. Jednotlivé 246
řezy jsou na sobě nezávislé a proto se sousední řezy 247
mohou lišit do takové míry, že model netvoří reali- 248
stický povrch. 249

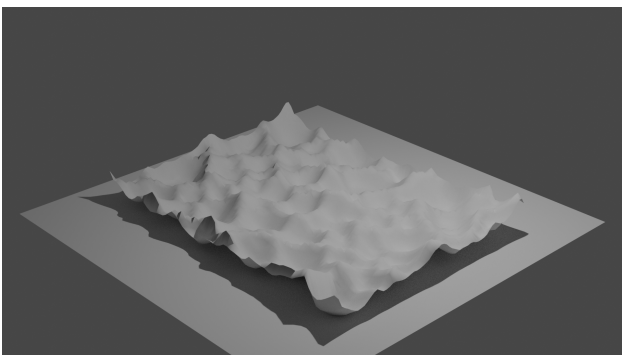
5. Navržený plošný model 250

Vzhledem k neuspokojivým výsledkům jednorozměr- 251
ného modelu v ploše bylo rozhodnuto vylepšit původní 252



Obrázek 5. Výsledek simulace po 24 dnech podle původního modelu. Mezi nezávislými řádky vznikají obrovské rozdíly.

253 model prováděním výpočtů změn výšek i ve sloupcích
 254 mapy, jelikož samotné řádky mezi sebou nemají závis-
 255 losti, což vede k nepřesnosti simulace a výsledný terén
 256 netvoří realistické struktury. Tím, že jsou v jednom
 257 kroku provedeny průchody všech řádků a následně
 258 i všech sloupců, vzniká jednak závislost mezi body
 259 mimo jeden řádek a zároveň se zvětšuje obor bodů
 260 plochy, které jsou na viditelnost zkoumané. Tento
 261 přístup stále není přesný reálnému prostoru, kde by
 262 měly být na viditelnost zkoumány úplně všechny body,
 263 proto by ale muselo dojít ke kompletní změně navrže-
 264 něho a implementovaného modelu.



Obrázek 6. Výsledek simulace po přidání průchodu sloupci. Mnohem reálnější tvary terénu.

265 Obrázek 6 zachycuje výsledek modelu po průchodu
 266 řádků i sloupců z počátečního stavu na obrázku 4,
 267 tedy stejného, jaký měl výsledek na obrázku 5. I tato
 268 zjednodušená varianta zohlednění bodů mimo vodo-
 269 rovné řezy tvoří značně realističtější povrch pole ka-
 270 jícníků. Tato úprava přitom znamenala pouze menší
 271 zásah do implementačního modelu, protože k její
 272 realizaci bylo možné využít funkce již implementované
 273 pro jednorozměrný model.

274 Časová náročnost výpočtu obou modelů závisí
 275 zejména na velikosti vstupní plochy, tedy počtu pixelů
 276 (bodů) ve výškové mapě. Pro soubor o rozměrech
 277 $200 \times 100px$ trvá výpočet 24 kroků simulace, přičemž
 278 $dt=1$ hodina, zhruba 62 sekund pro jednorozměrný

model, vylepšený plošný model na stejný výpočet 279
 potřebuje 105 sekund. To může znamenat problém pro 280
 větší plochy, nicméně je zde poměrně velký potenciál 281
 v paralelizaci výpočtů, protože rovnoběžné řezy jsou 282
 na sobě nezávislé a lze tedy jejich výpočty provádět 283
 současně na více jádrech. Paralelizace kódu v místech 284
 výpočtu výšky bodů v řezu byla realizována s pomocí 285
 OpenMP. Paralelizovaný výpočet kroku při stejných 286
 parametrech trvá na čtyřjádrovém procesoru použitém 287
 k testování 35 sekund. 288

Závěr

289

Cílem práce bylo vytvořit implementační model vzniku 290
 ledovcových struktur nazývaných „kajícníci“. Nejprve 291
 byly shrnuty známé informace o tomto jevu, dosavadní 292
 výzkumy jejich vzniku. Taktéž byl popsán jednoroz- 293
 měrný matematický model tohoto chování spočívající 294
 ve výpočtech změn výšky bodů podle viditelných bodů 295
 v řezu terénu, který vytvořila M. D. Betterton. Tento 296
 model byl implementován v jazyce C++ a bylo testová- 297
 no jeho chování. Podle předpokladů tento model není 298
 dostačující pro simulaci kajícníků v ploše. Následně 299
 byl proto tento model rozšířen o výpočet výšky bodu 300
 ve dvou na sebe kolmých řezech, který vykazuje oproti 301
 původnímu modelu věrohodnější tvary výsledných 302
 struktur. 303

Poděkování

304

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce doc. 305
 Ing. Martinu Čadíkovi, Ph.D. za vedení, pomoc a rady 306
 v průběhu práce na tomto projektu. 307

Literatura

308

- [1] Catherine Brahic. Spiky glaciers 309
 are slower to melt. [https://www.](https://www.newscientist.com/article/dn11309-spiky-glaciers-are-slower-to-melt) 310
[newscientist.com/article/](https://www.newscientist.com/article/dn11309-spiky-glaciers-are-slower-to-melt) 311
[dn11309-spiky-glaciers-are-slower-to-melt](https://www.newscientist.com/article/dn11309-spiky-glaciers-are-slower-to-melt) 312
- [2] Paul Scott Anderson. Europa may 313
 have towering ice spikes on its surface. 314
[https://earthsky.org/space/](https://earthsky.org/space/jupiters-moon-europa-penitentes-ice-spike) 315
[jupiters-moon-europa-penitentes-ice-spike](https://earthsky.org/space/jupiters-moon-europa-penitentes-ice-spike) 316
- [3] Louis Lliboitry. *The Origin of Penitents*. Journal 317
 of Glaciology, s. 2:331–338, 1954. 318
- [4] Charles Darwin. *The Voyage of the Beagle*. 1839. 319
- [5] V. Bergeron, Ch. Berger, and M. D. Betterton. *Con-* 320
trolled Irradiative Formation of Penitentes. 2006. 321
- [6] Meredith D. Betterton. *Formation of Structure in* 322
Snowfields: Penitentes, Suncups, and Dirt Cones. 323
 Physical Review E, vol 63, 2001. 324